

# آیا ریاضیات علمی منطقی است؟

محمد اردشیر



منطق ریاضی، ترجمه mathematical logic است. از منطق ریاضی دو معنا مستفاد می شود. ۱- منطق ریاضی به معنای خاص که در واقع باید ترجمه The logic of mathematic باشد چرا که ریاضیات مانند هر علم دیگری از نظمیایی برخوردار است که این نظمیها تحت عنوان منطق می آید و منطق ریاضی به معنای خاص بررسی ریاضی این نظمیها یا قواعد است.

۲- معنای عامی هم برای منطق ریاضی متصور است که عبارت است از: استفاده از روشها و تکنیکهای ریاضی برای بررسی منطق. به این معنا که منطق ریاضی یک علم کاربردی است و در مقوله ریاضیات کاربردی قرار می گیرد. بین دو معنای عام و خاصی که مطرح شد یک رابطه واقعی عام و خاص نیز وجود دارد.

کتاب «منطق ریاضی»، کتابی به معنای خاص منطق ریاضی است. یعنی بررسی منطق متعلق به ریاضیات نه منطق به معنای عام. در واقع باید گفت که معنای آن اخص است. یعنی کتابی است برای بررسی ریاضیات کلاسیک. شاید این سؤال پیش آید که ریاضیات کلاسیک چیست؟ و مگر ریاضیات غیر کلاسیک نیز وجود دارد؟ جواب این است که با توجه به نوع نگرش فلسفی که نسبت به اشیاء ریاضی و عالم ریاضی داریم ریاضیات غیر کلاسیک هم وجود دارد. به تسامح می توان گفت که در ریاضیات کلاسیک شیوه هایی از استدلال و برهان وجود دارد که در ریاضیات غیر کلاسیک مجاز نیست. به ویژه برهان خلف به عنوان یک برهان که در ریاضیات کلاسیک به کار می رود در ریاضیات غیر کلاسیک بر قرار نیست و قاعدتاً منطقی را می طلبد که با منطق ریاضیات کلاسیک متفاوت است. در این منطق، ریاضیات ساختی اصل طرد شق ثالث یک اصل معتبر ریاضی نیست. بنابراین منطق ریاضیات ساختی و به عبارت معروفتر منطق شهود گرایانه اصول و قواعد کمتری از منطق کلاسیک را دارد.

کتاب «منطق ریاضی» بسیار خاص است. یعنی عبارت است از: بررسی منطق ریاضیات کلاسیک. اما بین این معنای خاص و عام منطق ریاضی رابطه واقعی وجود دارد. به این معنا که حتی در معنای خاص منطق ریاضی ویژگی عام معنایی هم در این مورد وجود دارد. یعنی این که ما از تکنیکها و روشهای ریاضیات در بررسی تحقیق درباره ریاضیات سود می بریم. پس منطق ریاضی به دو وجه ریاضی است. نخست اینکه موضوع آن موضوع منطق ریاضی است، دوم اینکه روش آن ریاضی است. یعنی اینکه در عالم ریاضیات با استفاده از اصول و قواعد ریاضی، ما به موضوع منطق ریاضی می پردازیم. پس منطق ریاضی به معنای عام برای موضوع ریاضیات به دو وجه ریاضی است و این نکته ای نسبتاً مهم است. ریاضی بودن، روش تألیف دقیق دارد. اگر بخواهیم خیلی دقیق باشیم - و من اصرار به دقیق بودن آن دارم - این است که وقتی می گوییم روش ریاضی است یعنی در

عالم نظریه، مجموعه اصول و قواعدی ما را مجاز می کند که چه اعمالی را انجام دهیم و یا چه اعمالی را انجام ندهیم. اما اگر با مسامحه بخواهیم صحبت کنیم روش ریاضی همان علائم و نمادهایی است که برای اشاره به اشیا و اعمال جمع و ضرب و تقسیم به کار می رود.

بدیهی است که هر چه این تکنیک ریاضی را در سطح بالاتری به کار بریم یعنی هر چه هزینه بیشتری بپردازیم چیز بهتری به دست می آوریم به همین دلیل است که غالباً قضایای شگفت انگیز بنیان افکن علم ریاضی از تکنیکهای پیشرفته ای در اثبات برخوردار است و هر چه روش ریاضی را محدودتر کنیم طبعاً چیز کمتری به دست می آوریم. به معنای عام منطق ریاضی باز می گردیم. اما منطق چیست. آیا واقعاً یک منطق وجود دارد و یا منطقهای مختلفی وجود دارند؟ آیا هر کدام از اینها روش خاص ریاضی را برای بحث می طلبد؟ فارغ از اینکه ما چه تعریفی برای منطق قائل باشیم شکی نیست که نقطه آغازین منطق ریاضی ابداع زبان مناسب است و این پیشفرض علمی منطق ریاضی است که منطق یا به عبارتی دیگر نظمهای تفکر در قالب زبان متجلی می شوند. بنابراین زبان، بحث فلسفی عمیقی را می طلبد. چیزی که در قالب زبان نیاید در قلمرو کار منطق و ریاضی قرار نمی گیرد. این زبان، زبان طبیعی نیست گرچه با بررسی و تجزیه و تحلیل زبان طبیعی ساخته می شوند. این زبان را اصطلاحاً «زبان صوری» می گوئیم. در این زبان نمادهایی را به طور صوری ابداع می کنیم که این ابداع نمادها آن را از زبان طبیعی جدا می کند. اما در عین حال این نمادها بدون مبنا انتخاب و ابداع نمی شوند. این نمادها با تجزیه و تحلیل زبان طبیعی و اجزای زبان طبیعی ساخته می شود. بنابراین با تجزیه و تحلیل زبان سعی داریم مدل ریاضی بسازیم. به عبارتی دیگر این بخشی از کار منطق ریاضی است که ما برای نحوی از زبان ابتدا مدل ریاضی می سازیم. اما مفاهیم دیگری مثل مفهوم صدق یا حقیقت یا تعریف پذیری در قلمرو معنا شناسی و دلالت شناسی قرار می گیرند. قسمت دوم کار، مدل سازی برای معنا شناسی یا دلالت شناسی زبان است. اما در منطق ریاضی بین نحو کلام یا زبان و یا معنا شناسی زبان برای جلوگیری از هر نوع خلط احتمالی جدایی است. نحو در زبان صوری چیزی شبیه گرامر و دستور زبان است. یکی از مسائل اساسی که در این مرحله در منطق ریاضی به آن توجه شده این است که بین زبانی که به عنوان شیء ساختم و زبانی که در آن درباره این شیء که در زبان هست می خواهیم صحبت کنیم، تمایز اساسی وجود دارد. بنابراین هوشمندی در زبان جلوگیری از پارادوکسهایی است که در طول تاریخ وجود داشته و غالباً ناشی از خلط زبان و مفاهیم فرا زبانی بود مثل عبارت پارادوکس دروغگو.

یکی از مفاهیمی که به نوعی مشترک در زبان شناسی، فلسفه و منطق است و شاید یکی از مفاهیم بسیار اساسی باشد مفهوم «معناداری» است. اما متأسفانه باید گفت هیچ کدام از این سه شاخه تا کنون قادر به ارائه یک مدل از آن نشده اند. در این زمینه تحقیقات همچنان ادامه دارد. از مفاهیم اساسی که در نحو زبان وجود دارد مفهوم «برهان» است که در مقابل مفهوم «صدق» قرار دارد. یکی دیگر از علایق اساسی منطق ریاضی رابطه این دو است. اینکه ما در نحو زبان مفاهیمی داریم و آنها را ابداع کردیم و همین طور در دلالت شناسی زبان مفاهیمی را مدل سازی ریاضی کردیم و طبیعتاً روابط به این دو مقوله از علائق اساسی منطق است. اینکه آیا در یک دستگاه منطقی گزاره ای مثل E اثبات یا استنتاج شود کاملاً یک مفهوم نحوی است که چگونه یک جمله را از بقیه مفروضاتان تولید کنید. تولید کاملاً یک مفهوم مبتنی بر گرامر زبان است و از طرف دیگر بپرسید که آیا این جمله راست است یا دروغ؟ یک مفهوم معنایی است اینکه خارج از زبان بین این دو چه رابطه ای وجود دارد و بررسی رابطه این دو مفهوم از علائق ذاتی بررسی منطق ریاضی است.

تدوین منطق ریاضی اساساً کار سختی است ولی می توان گفت بین سالهای ۱۸۵۰ تا ۱۹۵۰ این کار توسط چندین نفر صورت گرفته است. به نظر من ارسطو اولین کسی که این بنا را بنیاد نهاد. فارغ از اینکه منطق ارسطو از نظر منطق ریاضی چقدر موجه بنماید و مهم باشد، به نظر من کاخ عظیم منطق ریاضی را ارسطو ساخته است. این کاخ چنان مستحکم بود که حداقل تا ۱۸۷۹ وقتی که فرگه وارد میدان شد، دوام آورد و تصویر و تصور ما را با تجزیه و تحلیلی که نسبت به زبان آغاز کرد از منطق دگرگون کرد. منطق ارسطویی، تحلیلی را از اجزای جمله شروع می کند که مبتنی بر موضوع محمول است و رابطه این تصویر را فرگه دگرگون کرد و آن را تبدیل به تابع و شناسه نمود. بدین ترتیب مفهومی ریاضی وارد میدان شد و تصویر و تصور ما را از مفهوم گزاره و جمله تغییر داد. علاوه بر این فرگه کارهای دیگری هم انجام داد که بنیاد منطق ریاضی جدید مبتنی بر کارهای فرگه است.

سومین کسی که کار انقلابی در منطق کرد اما مبتنی بر کارهای فرگه بود گودل است. او در حوالی سالهای ۱۹۳۱ و ۱۹۳۰ دو نوع قضایای تمامیت و قضایای نا تمامیت را ارائه کرد. قضیه تمامیت باز می‌گردد به همان مفهوم و سؤالی که من در رابطه نحو و معناشناسی مطرح کردم. آیا در یک دستگاه منطقی یک حکم یا یک گزاره قابل استنتاج صادق است و بالعکس در حکمی که صادق است هر معنایی در همه جهانهای ممکن آیا این قابل استنتاج است و اگر این دستگاه چنین ویژگی داشته باشد نشان دهنده این است که این دستگاه کامل و تمام است. گودل در ۱۹۳۰ ثابت کرد که این بنیانگذاری منطق بر شالوده تفکر فرگه برای منطق کامل هست. قضایای نا تمامیت گودل پیچیده تر و البته مایوس کننده تر برای تفکر بشری است.

× متن مکتوب سخنان دکتر محمد اردشیر، استاد ریاضیات دانشگاه صنعتی شریف در یکصد و هفتاد و چهارمین نشست کتاب ماه ادبیات و فلسفه.